

## 第5章 附加材料

### — 前言 —

你是否希望在那些故意简洁的课程描述中有更多的例子、讨论和评论？如果是这样，你来对地方了！这个文件包含了第5章一些活动的附加材料。

对于谜题，提供了许多已解决谜题的示例，并附有关于如何创建这些谜题的额外评论。早期家庭数学计划的理念是早期数学是一个家庭应该共同完成的活动，为你的孩子制作谜题与您一起解决是这一过程的重要组成部分。一旦掌握了每个谜题，你会发现大多数(如果不是全部)谜题都相对容易创建。

许多这些谜题具有不同的难度级别，接下来的页面中有很多建议和示例来创建这些级别。总是从最简单的谜题开始。让孩子在稍微简单的谜题中体验成功、理解和乐趣，远比让他们在过于困难的谜题中感到沮丧、气馁和挑战重重要好。一旦你的孩子建立了对数学活动的信心和兴趣，就可以慢慢加入更多的挑战。另外，并不是所有的谜题对每个人都适用，所以不要强迫进行那些似乎没有连接的谜题和活动。

接下来的页面中你将会找到：

- 第5章 – 带因子的尼姆游戏
- 第5章 – 埃拉托斯特尼筛法
- 第5章 – 杠杆与平衡木
- 第5章 – 分割盒子
- 第5章 – 字母替换谜题
- 第5章 – 调查 - 玩转形状
- 第5章 – 乘积游戏
- 第5章 – 有限计算器
- 第5章 – 双倍或无效

---

### — 法律声明 —

每个家庭都应该有机会一起学习和享受数学。为此，《早期家庭数学》是一套家庭和教育工作者可以自由编辑、翻译、复制和分发的材料，无需许可，仅用于非商业用途。

## 第5章 — 带因子的尼姆游戏

### — 介绍 —

从任何一个数字开始，比如20。让孩子决定是先走还是后走。在他们的回合中，玩家可以从当前数字中减去当前数字的任何一个因子。被迫使数字变为0的玩家输。

### — 分析 —

像往常一样，了解这个游戏的一个好策略是查看游戏的简化版本，在这种情况下意味着从非常小的数字开始。如果轮到你，而你面对这些数字，每个数字的结果如下：1 - 输，2 - 赢，3 - 输，4 - 赢，5 - 输，6 - 赢，7 - 输，8 - 赢。到这里，模式很清楚——如果轮到你且你有一个奇数，你将输；如果你有一个偶数，你将赢。

找到获胜策略是一个重要的步骤，但让我们深入探讨一下。为什么会这样？是什么奇数和偶数的属性造成了这种情况？给你的孩子提出这个问题，并给他们足够的时间去思考和实验——不必着急，这个过程是非常宝贵的，不应该被缩短。

通过对小数字的实验很快就能揭示出问题所在。如果你有一个奇数，所有的因子都是奇数，因此当你减去任何因子时，结果是一个偶数。因此，奇数在一轮中总是会导致下一轮出现偶数。偶数则有奇数和偶数因子。因此，情况有所不同。然而，如果你有一个偶数，你的目标是给对手一个奇数，而有一个简单的方法可以做到这一点——选择因子1并减去它！

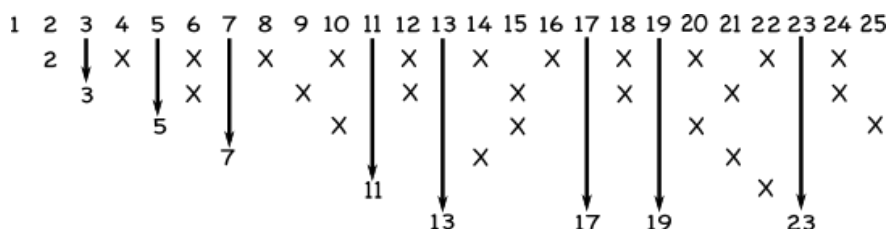
# 第5章 — 埃拉托斯特尼筛法

## — 介绍 —

从1到25的数轴开始——如果空间和耐心允许，可以使用更大的范围。

在2下方写下数字2。在与这个2对齐的数轴上，将2的倍数下面标上X。

现在，拉出第一个下方没有X的数字(在这个例子中是3)，并将它写到下一行。写下3，并在该行的所有倍数上标上X。继续这样做。最后，你将会得到所有的质数。记住，1是一个单位而不是质数！



## — 分析 —

这个过程揭示了一些有关质数的有趣事实。看看你的孩子是否能提出一些这些问题——不过，如果它们没有自然出现，以下是一些可以问的问题：

1) 为什么下拉的数字是质数？

假设你有一个合成数。我们想要证明这个数字下面会有一个X。作为合成数，它可以被某个在1到该数字之间的数字 $n$ 整除。如果 $n$ 是质数，那么我们的合成数会有一个来自 $n$ 的早期质数的X。如果 $n$ 不是质数，那么它有一个来自某个早期质数的X，称之为 $p$ 。现在， $p$ 可以整除 $n$ ，而 $n$ 可以整除我们的新数字，所以 $p$ 必须能整除我们的新数字。因此，在标记 $p$ 的倍数时，会在我们的新数字下放一个X。

2) 当你为质数的倍数放X时，有些数字已经有X是来自早期质数的。当这种情况发生时，何时不会发生？

让我们来看一下上述筛选法中的5的倍数。倍数 $5 \times 2$ 、 $5 \times 3$ 和 $5 \times 4$ 已经被标记。只有 $5 \times 5$ 是新的。这是因为 $5 \times 2$ 、 $5 \times 3$ 和 $5 \times 4$ 都是2和3的倍数，2和3是早期质数。如果我们想要在新的位置放X，我们必须将5与只包含5及以上质数的数字相乘。因为跟踪所有这些有点繁琐，有些人只标记奇数倍数，其他的则保持不变。

3) 对于这个筛选法, 最后一个在其行中产生有用新X的质数是什么?

在这个筛选法中, 产生有用X的质数是2、3和5。7和11的倍数都是旧的X。如果你查看上一个问题的答案, 你会发现这里的答案。得到新的X的唯一方法是将一个质数与大于或等于它自身的质数相乘。一旦我们到达一个质数, 例如7, 其中 $7 \times 7 > 25$ , 我们就不需要再检查它。因此, 我们只需要检查其平方小于或等于最后一个数字的质数。

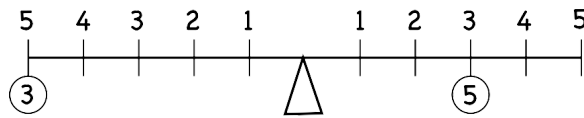
4) 如果给定一个数字, 例如53, 你需要用哪些质数来判断它是否是质数?

根据上一个问题的答案, 我们只需要检查平方小于或等于53的质数。这些质数是2、3、5和7——这些质数都不能整除53, 因此53必须是质数!

# 第5章 - 杠杆与平衡木

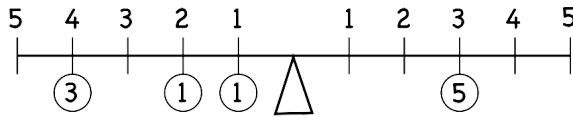
## - 杠杆 -

杠杆原理指出，施加在杠杆一侧的力等于质量乘以其距离支点(支点)的距离。



在上面的杠杆中，左侧的3在离支点5的距离处，所以它的力是 $3 \times 5 = 15$ 。右侧的5在离支点3的距离处，所以它的力是 $5 \times 3 = 15$ 。这个杠杆处于平衡状态。

如果一侧有多个重物，则这些力会相加。



在这个杠杆中，左侧有 $3 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ ，右侧有 $5 \times 3 = 15$ 。所以它是平衡的。

我们将这些问题限制为仅使用整数。你可以决定是否允许多个重量挂在同一个点上——在下面的讨论中，我们假设允许多个重量。

## - 杠杆谜题 -

你有一个3单位的重物和一个5单位的重物要放在杠杆的两侧。为了使杠杆平衡，这些重物应该放在什么位置？答案可以是距离5和3，但也可以是10和6，甚至更大的答案如15和9。对你孩子提出的任何答案持开放态度并进行讨论。

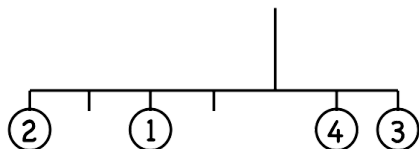
如果你有一个3单位和一个5单位的重物放在杠杆的一侧，那么你可以在另一侧放置哪些重物和放置在什么距离上？这个问题延续了第4章末尾的“Make It Count”页面上的问题。像以前一样，探索不同的重物组合。如果3和5被替换为4和5、4和9或6和9，结果会如何变化？

如果我们将3单位和5单位的重物放在杠杆的两侧，这个问题会发生什么变化？现在可以很容易地用 $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$ 来称量一个1单位的重物。还有其他重量可以用这种方法称量吗？

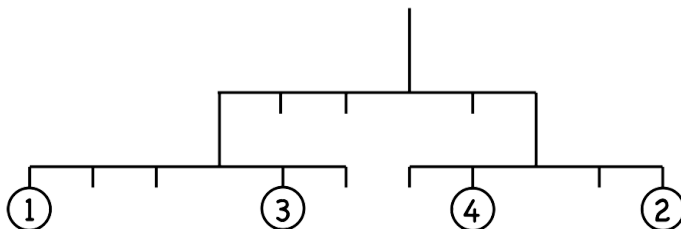
## — 平衡木 —

你会得到一些重物和一个设计好的平衡木，该平衡木有一些挂点。挑战在于将每个挂点上最多放置一个重物，以使得平衡木的每个臂都保持平衡。为了简化问题，我们将假设创建平衡木的线是无重的。平衡木上的每个臂都是一个需要平衡的杠杆，因此这些谜题是杠杆平衡的扩展——在开始这些问题之前，请先练习这些杠杆平衡的谜题。

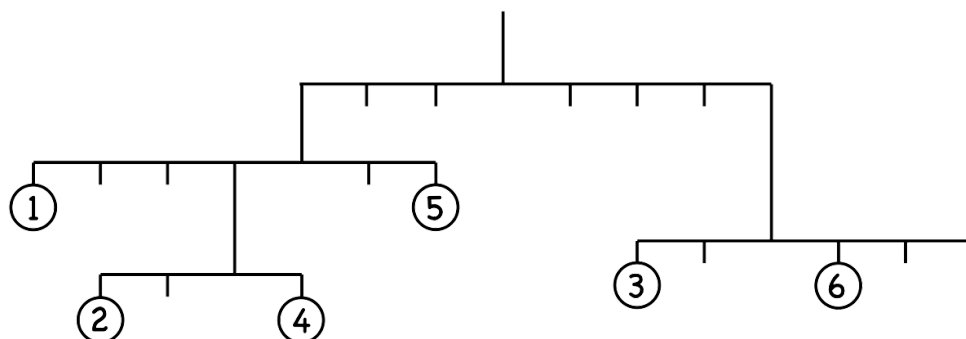
从最简单的平衡木开始，这些平衡木只是空中的杠杆。以下是将1到4的重物放置到这个平衡木上的解决方案，使其平衡。这作为一个杠杆，支点在悬挂点。对于这个平衡木，我们有 $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ 。



如果平衡木有多个层次，那么每个层次上的每个臂都必须作为杠杆来平衡。在下一个平衡木中，两个底层臂的平衡因为 $1 \times 3 = 3 \times 1$ 和 $4 \times 1 = 2 \times 2$ 。对于上一个层次，只需将下方的重物加起来。例如，左侧的重物是 $1 + 3 = 4$ ——就上面的层次而言，重物在底层臂上的具体位置无关紧要。因此，对于下一个层次， $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$ ，所以最上面的层次也保持平衡。



玩得开心，互相制作平衡木谜题。以下是一个用1到6的每个数字来玩的最后谜题。不要担心使用每个数字一次的复杂性。任何完成的谜题都会很有趣。检查各个层次，我们有： $2 \times 2 = 4 \times 1$ ； $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$ ； $3 \times 2 = 6 \times 1$ ；和 $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$ 。



# 第5章 - 分割盒子

## — 介绍 —

一个矩形，4x4或更大的，里面有一些数字，需要将其划分成更小的矩形。每个数字必须在一个单独的矩形中，该矩形的面积就是这个数字。

对于成年人来说，制作这些谜题相对简单。选择一个矩形，将其内部划分为多个矩形，在每个内部矩形中写上面积的数字，然后去掉所有内部矩形的标记。唯一棘手的部分是将数字放置在使谜题相对容易解决的地方——如果你的谜题难度过大，可以根据需要提供提示。

## — 解决策略 —

以下是一些可以简化解这些谜题的一般策略。尽量让孩子在玩谜题时发现这些规则。和孩子一起列出他们总结出的规则。

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) 观察只有一个或两个选项的数字。

两个4的选项都受到高度限制。每个4只能位于 $1 \times 4$ 或 $2 \times 2$ 的矩形中。上面的4被限制，因此不能在 $1 \times 4$ 的矩形中。因此，必须在左上角放置一个 $2 \times 2$ 的矩形。这将下方的4仅剩下一个 $1 \times 4$ 的可能性，并且沿底边放置。

2) 观察质数——它们必须位于 $1 \times n$ 的矩形中。

上面的谜题中的3必须包含在 $1 \times 3$ 的矩形中。右上角的3只能是沿顶部边缘或右侧的 $1 \times 3$ 矩形的一部分。由于左上角的 $2 \times 2$ 方块被4占用，因此顶部边缘不能有 $1 \times 3$ 的矩形。

底部的 $1 \times 4$ 矩形迫使下方两个3中的较低一个选择较高的垂直可能性。

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) 靠近最大尺寸的数字通常选择较少。

观察下一个谜题中的6和5。最上面的6需要很多空间，唯一能容纳它的方式是垂直向下，占据整个列。另一个6不能是 $1 \times 6$ ，因为行被其他6的列切断了。因此，下方的6必须是 $2 \times 3$ ，这还没有完全确定。

作为另一个例子，如果这个谜题中有一个8，那么 $1 \times 8$ 是不适合的，因此它必须是 $2 \times 4$ 矩形的一部分。

4) 被框住的方块选项较少。

最上面的5被框住了，所以它唯一的选择是位于5个方块的列中。另一个5，因为它也是一个质数，必须垂直或水平放置。它被6的列水平切断了，所以它必须垂直向上，正好在3的下方。

5) 角落通常受到高度限制。

右上角的2必须水平放置，因此很容易填充。

# 第5章 - 字母替换谜题

## - 介绍 -

一旦你的孩子对本章前面几页的缺失数字谜题感到熟悉，他们就可以开始玩这些谜题了。在这些谜题中，一个或多个数字被字母替代。字母的三个规则是：

- 每个字母始终代表相同的数字
- 数字的最左边的数字永远不能是0
- 不同的字母必须代表不同的数字

创建这些谜题的方法是从一个加法或减法问题开始，替换一个或多个数字。谜题也可以设计成有趣的解题挑战。注意，字母的值在不同的谜题中不互相影响。

## - 例子 -

第一个例子说明了如何将一个标准的加法或减法问题转化为字母替换谜题。第一个版本将所有的6替换为A，第二个版本则将2替换为B。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

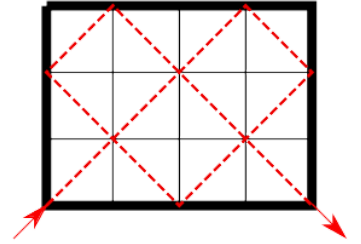
其余的这些例子都经过精心构造，以便通过特定情况的性质来解决。需要注意的一个性质是，当你加两个数字时，进位到下一列的值始终是0或1。例如，在问题A + A = C4中，C必须是1，因为它不能是0。

B	B	A	A	D	A
<u>+8</u>	<u>+B</u>	<u>+A</u>	<u>+2</u>	<u>+2</u>	<u>+B</u>
C	8	C4	BC	EE	AC
A	C	A	A		
A	C	A	A	A	B
<u>+A</u>	<u>+C</u>	<u>+7</u>	<u>+B</u>	<u>+BB</u>	<u>+AB</u>
B2	D4	B	B0	A7	BA
BA	AD	AA	AA	AA	AA
<u>+BB</u>	<u>+BD</u>	<u>+BA</u>	<u>+CB</u>	<u>+AB</u>	<u>+AA</u>
CAB	BCC	BBC	BBC	CAC	BBC

# 第5章 - 玩转形状

## — 弹跳台球 - 介绍 —

想象一下一个台球桌，每个角落都有一个袋子。当球从台桌的一侧弹开时，它以相同的角度弹开。如果我们从左下角以45度角射出一个球，它会最终到达哪里？答案取决于桌子的大小。右边的图展示了在一个3乘4的桌子上会发生什么。



给你的孩子一张台桌的图纸，挑战他们预测哪个角落会首先被击中，以及在到达那个角落之前需要多少次弹跳。

## — 弹跳台球 - 分析 —

开始时，让你的孩子随意玩这个问题，不要急于发现结果。正如你将看到的，这个问题涉及一些对年轻人来说较为复杂的概念。根据需要，提出一两个问题，以帮助他们的思考更加有条理。你知道接下来会发生什么——首先查看更简单的桌子以寻找模式——当这个想法对你的孩子变得自动时，它将对他们的一生产生很大帮助！

最简单的桌子是  $1 \times n$  型的，这些很容易理解。通过玩一些  $n$  的值，模式很快就会显现出来。容易低估像这样的简单结果；然而，任何完全理解的结果都值得庆祝，而这个结果将引导你得到更多的结果。

**结果：** $1 \times n$  的桌子：球会弹  $n-1$  次。如果  $n$  是偶数，球将最终到达右下角；如果  $n$  是奇数，球将最终到达右上角。

接下来最简单的桌子是  $2 \times n$  的。这里的模式稍微复杂一些。良好的记录保持对于这种情况非常重要。一个细心的实验者会注意到， $2 \times 4$  的桌子行为就像  $1 \times 2$  的桌子一样，而  $2 \times 6$  的桌子行为就像  $1 \times 3$  的桌子一样。这很快推广到下一个结果。

**结果：** $2 \times 2n$  的桌子行为就像  $1 \times n$  的桌子一样。

为什么会这样？这是怎么回事？这是一个数学过程，要让孩子养成的习惯是——寻找模式，然后试图理解它们，并基于新的理解扩展之前的结果。

发生的情况是，若将桌子的两个维度都放大相同的倍数，球的反弹次数不会改变。当这样做时，桌子变大了，但几何形状保持不变。在几何学中，这两张桌子被称为“相似”的。

**结果：**一个  $k \times m$  的桌子和一个  $k \times n$  的桌子在行为上完全等同于一个  $m \times n$  的桌子

我们通过小步前进达到了这里，但这是一个重要的结果。这意味着我们可以通过首先去掉任何公共因子来开始对任意桌子的分析。

接着我们对  $2 \times n$  表格的分析。我们理解了当  $n$  为偶数时会发生什么，但当  $n$  为奇数时会发生什么？对于  $n = 1, 3, 5, 7$  等情况下的  $2 \times n$  表格，会发生什么？这个模式很快就变得容易看出来。

结果：当  $n$  为奇数时， $2 \times n$  表格会有  $n$  次弹跳，并最终到达左上角。

取得了很多进展。通过更多的例子，可以发现一些新的模式。

结果：如果  $n$  不是 3 的倍数， $3 \times n$  的桌子有  $n+1$  次反弹，当  $n$  除以 3 的余数为 1 时，球会落在右上角；当余数为 2 时，球会落在右下角。如果  $n$  是奇数， $4 \times n$  的桌子有  $n+2$  次反弹，球会落在左上角。如果  $n$  不是 5 的倍数， $5 \times n$  的桌子有  $n+3$  次反弹，当  $n$  为奇数时，球会落在右上角；当  $n$  为偶数时，球会落在右下角。

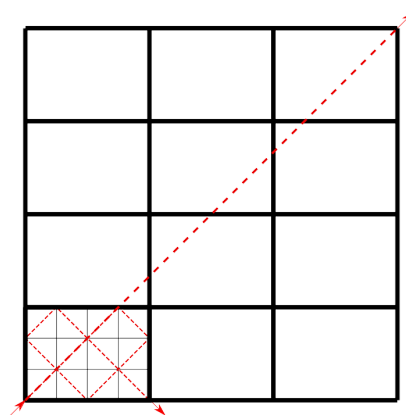
此时我们会倾向于查看数据，寻找一些模式，并做出一些猜测。

猜想：假设  $k$  和  $n$  没有公因数。则  $k \times n$  的表格会有  $k+n-2$  次反弹。如果  $k$  是偶数，则会结束在左上角；如果  $k$  是奇数且  $n$  是奇数，则会结束在右上角；如果  $k$  是奇数且  $n$  是偶数，则会结束在右下角。

哇，如果这个猜想是正确的，那我们就完全解决了这个问题！你知道接下来会发生什么……让我们看看是否可以解释这个猜想为什么应该成立（或者发现它是错误的）。

尽管有其他理解这种情况的方法，但有时使这个问题更容易理解的是一个新想法。你可能不会想到，但一旦你看到它，你会感到惊讶。这个想法是将桌子展开，以便球可以沿直线运动！以下是如果我们展开原始的  $3 \times 4$  桌子，并将球的路径变成直线后发生的情况。

现在看到这个猜想是正确的要容易得多。反弹对应于穿越线——在一个方向上有  $(k-1)$  条线要穿越，在另一个方向上有  $(n-1)$  条线要穿越，因此总共有  $(k-1) + (n-1) = k+n-2$  条线要穿越。看到球最终停在哪个角落是追踪事物展开方式的问题。我们现在完成了这个相当有趣的旅程。



# 第5章 - 调查 - 玩转形状

## — 填充区域与图形 - 介绍 —

假设你有一个 $8 \times 8$ 的棋盘和一组 $1 \times 2$ 的砖块。找到一种用32个 $1 \times 2$ 的砖块恰好覆盖整个棋盘的方法是相对简单的。

我们开始尝试从棋盘上移除一些方块，看看会发生什么。如果你移除棋盘的一个角落，你会立即知道不能用砖块覆盖棋盘，因为砖块总是覆盖偶数个方块，而现在剩下63个方块需要覆盖。好吧，移除两个角落以使剩余方块数量变成偶数——现在能覆盖它吗？答案取决于你移除的两个角落的位置。为什么？如果你不再限制自己只移除角落，那会发生什么呢？

## — 填充区域的形状 - 分析 —

让你的孩子在揭示颜色规则之前先玩这些问题。如果他们在小棋盘上尝试，可能会自己发现这个规则，这通常效果更好。

一个很有帮助的观察是使用棋盘方块的着色。如果你用 $1 \times 2$ 的砖块，其中一个方块涂成白色，另一个涂成黑色，你会看到有趣的现象。每个砖块必须覆盖一个白色方块和一个黑色方块。这样， $k$ 块砖块将覆盖 $2 \times k$ 个方块，其中有 $k$ 个白色方块和 $k$ 个黑色方块，即每种颜色的方块数量相同。利用这个想法，可以明显看出，如果移除的方块数量在颜色上不相等，那么就不可能用砖块覆盖整个棋盘。

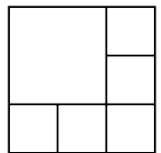
如果你的孩子对这些问题感兴趣，可以开始尝试使用其他形状来填充棋盘。尝试用 $1 \times 3$ 的砖块或3个方块形成L形来填充棋盘。你会发现哪些模式和规则？还有哪些其他形状可能有趣？

## — 填充正方形的正方形 - 介绍 —

如何用其他正方形填充一个正方形，其中这些正方形的大小不必完全相同？不过，正方形的边长不能是完全随机的数值——每个正方形的边长必须是固定长度的整数倍。需要研究的问题是：所有可能的正方形数量是什么？此外，如果你知道一个数字是可能的，是否有一种简单的方法来描述如何实现？

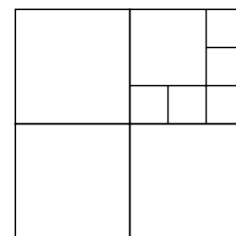
让你的孩子在多天内进行尝试，不要急于找到答案。有很多不同的方法来提出这种调查的想法，因此要灵活并与孩子的想法一起工作。以下是一个展示如何实现6个正方形的图示。

快速得出一些例子总是个好主意。可以先把大正方形分解成相同大小的正方形作为一个简单的开始。由此你可以知道平方数(1、4、9、16、25、.....)都是可行的。



基于6个正方形的例子，我们可以使用任意大小的一个大正方形，并在它的两个边上放置1x1的正方形。这样对越来越大的正方形(1x1, 2x2, 3x3等)进行操作，我们得到 $1+3=4$ ,  $1+5=6$ (如图所示),  $1+7=8$ ,  $1+9=10$ ，依此类推。所以，从4开始的所有偶数都可以用这种方式完成。

一个强大的想法可以迅速解决这个问题，那就是我们可以将一个可行的图形中的一个正方形替换为另一个可行的图形。例如，如果你取一个简单的2x2正方形，并用4个1x1的正方形填充它，然后将其中一个1x1的正方形替换为6个正方形的例子，你会得到如右图所示的包含9个正方形的图形。



由于一个正方形被一个包含n个正方形的图形替换，正方形的总数发生的变化就是增加了n-1个。这意味着我们可以取一个可行的数字，并将比它小1的倍数加到任何其他可行的数字上。特别是，我们可以将 $4-1=3$ 的倍数加到任何其他可行的数字上——最容易加上3的是从4开始的所有偶数。

综合来看，数字1、4、6、7、8、9……都是可行的，并且至少有一种简单的方法可以构建它们。而且，你很容易发现2、3和5是不可能的。

如果你的孩子喜欢探索这个问题，可以尝试在这个主题上进行一些变化。假设你只能使用特定大小的正方形，比如1x1、2x2和3x3。或者只允许使用2x2和3x3。看看哪些问题会导致有趣的结果，哪些问题则不那么有趣。

另一个可以探索的方向是用相同形状的图形填充其他图形。例如，可以对正三角形(所有边长相等的三角形)提出同样的问题。有些图形在这方面的研究很有趣，而有些则一点也不有趣——哪些图形呢？

# 第5章—乘积游戏

## — 介绍 —

使用如下填写好的共享纸张：

第一个玩家将一个棋子放在底部行1-9方格中的任意数字上。第二个玩家将另一个棋子放在底部行1-9方格中的另一个数字上，并在6x6网格中标记出乘积。从此以后，每个玩家都可以选择移动两个棋子中的一个，并标记乘积(如果可能)。第一个在一行中连续获得三个方格的玩家获胜。将6x6网格中的乘积数字打乱，给孩子更多练习识别乘积的机会。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

这些游戏板可以做得很大，但它们会变得非常庞大。以下是一些较大的棋盘，以及它们相应的较大数字范围。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

带有红星的方格是“自由”方格，任何一方都可以根据需要使用。

# 第五章 — 有限计算器

## — 介绍 —

假设你有一个严重损坏的计算器，并且你被挑战在计算器上产生某些结果。你可以设计多种有趣的挑战场景，提供一个快速的谜题描述。这项活动在你有空的时候可以口头进行。以下是一些示例，供你开始时参考。

虽然这些问题中有些涉及到更深层的数学，但大多数问题完全是为了享受其中的乐趣。

1a) 假设你有一个具有 +、-、× 和 ÷ 运算符的计算器，但只有一个有效的数字键，即 4。你能得到结果 21 吗？如果可以，你需要最少的步骤是多少？

例如， $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$  是一种方法，但还有许多其他方法可以做到这一点。另一个例子是  $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$ 。目标是玩玩看，享受探索的过程。

1b) 假设你最多可以使用 4 四次 - 你可以产生哪些数字？假设你必须准确使用 4 四次。

随着孩子数学资源的增加，四个 4 的问题是一个有趣的谜题。在这个阶段，孩子的选择非常有限，但玩起来仍然很有趣。特别是在不使用除法或小数（即分数）的情况下，很多数字将特别困难。不要担心按顺序列出所有数字 - 只要尽可能多地得出不同的数字即可。

以下是一些示例，供你开始时参考。

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44 / 44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44 / 4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) 玩弄其他单一数字并创建其他结果。

2a) 假设你的计算器只能加 4 或 7。你能产生哪些数字？

这是我们已经看到的结果。从  $(4 - 1) \times (7 - 1)$  开始，你可以通过加上 4 和 7 的倍数来得到所有数字。 $18 = 2 \times 7 + 4$ ,  $19 = 3 \times 4 + 7$ ,  $20 = 5 \times 4$ ,  $21 = 3 \times 7$ , 以此类推。

2b) 假设它有 4 或 7，但可以进行加法和减法。你能产生哪些数字？

你可以用这种方式产生所有数字。

2c) 用其他数字对替换 4 和 7。这些数字对会有什么结果？

在数论中，这被称为贝祖定理。结果表明，通过结合两个数的倍数，你可以产生两个数的最大公约数的任意倍数。

3) 假设你只有一个 1 键，并且只能加法或乘以 2。例如， $2 \times (2 \times 1) + 1$  是 5。你还可以创造哪些其他数字？

这是一个伪装成二进制数字的问题。对于你的孩子来说，意识到这一点或理解它并不重要，这只是为了玩玩看。任何数字都可以用二进制表示，所以所有数字都可以通过结合乘以 2 和加 1 来实现。例如，21 是  $16 + 4 + 1$ 。所以， $21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0) + 1$ 。

# 第5章 - 双倍或无效

## - 介绍 -

玩家们开始游戏时，秘密挑选5个大于20且不超过120的不同数字。选择好之后，这些数字被写出来，让所有人都能看到。使用数字卡片或其他设备，从1到20中随机生成一个数字。这个数字会被重复加倍，直到首次命中某个玩家的数字或数字变得大于120为止。第一个拥有所有五个数字被命中的玩家获胜。

## - 分析 -

问题是：选择哪个五个数字是最好的？以下是一些值得考虑的想法。

规则：总是选择一个2的幂乘以1到20之间数字的数。

如果你选择了像23或46这样的数字，它们永远不会被命中，你必然会输。

规则：不要选择一个是你本来可以选择但没有选择的数字的两倍。

如果你选择了44，为什么不选择22呢？如果其他人选择了22，你将会错过一个回合。

进一步分析：1到20的数字被选择的概率是相等的。然而，由于9会引出18，因此18作为起始点的概率是11的两倍。如果你综合考虑不同的起始方式，这些起始点的概率如下：

11 - 1/20 (来自11)

12 - 3/20 (来自3、6和12)

13 - 1/20 (来自13)

14 - 2/20 (来自7和14)

15 - 1/20 (来自15)

16 - 5/20 (来自1、2、4、8和16)

17 - 1/20 (来自17)

18 - 2/20 (来自9和18)

19 - 1/20 (来自19)

20 - 3/20 (来自5、10和20)

显然，最佳的选择是16、12和20的倍数。一个简单的策略是使用以下五个数字：32、64、24、48和40。这些数字并不总是能赢，但在长时间内它们应该能为你带来很好的结果。